

QUBITS OG KVANTECOMPUTERE

NOTER VERSION **vF**

LEKTOR KIM SPLITTORFF

Niels Bohr Institutet

Fysik KU

`split@nbi.ku.dk`

Indhold

I	Introduktion	1
1	Formål	1
2	Hvad er kvanteteknologier?	1
II	Bits og Qubits	2
3	Bits	2
4	Hvordan man udfordrer en klassisk computer	2
5	Kvantetilstande og Qubits	3
III	Superposition	4
6	Superposition og normalisering	4
7	Superposition som en enhedsvektor	4
IV	Måling og sandsynlighed	6
8	Måling & Sandsynlighed	6
9	Hvad sker der når vi måler på en tilstand?	8
V	Sammenfiltring	10
10	Sammenfiltring af to qubits	10
11	Måling på sammenfiltret tilstand	11
VI	Operatorer & Diagrammer	13
12	Enkelt qubit operatorer	13
13	Operatorer der virker på to qubits ad gangen	15

14 Diagrammer med målinger	16
VII IBM Q	19
15 Sådan kommer du på IBM Q	19
16 Sådan får du øvelserne ind på IBM Q	19
17 Sådan laver du øvelserne	20
VIII Appendices	21
A Grover	21
B Hvad er det vi måler?	25
C Hvad sker der med tilstanden når vi måler en operator? (Version 2)	27
D Postulaterne samlet	28
E Polarisation af lys	29
F Eksperimenter med polarisering	29
G Beregninger der forklarer eksperimenterne med polarisering	30
H Vektorer	31
I Regnereglerne svarer til prikproduktet	32
J Matricer	33
K Operatører som matricer	34
L Gange matricer sammen	34
M Egenverdier og egensøjler	35
N To mirakler?	37
N.1 Mirakel nr. 1: tilstanden er stadig normaliseret efter vi har virket på den med en operator	37
N.2 Mirakel nr. 2: Hvordan kan det være at der er to reelle egenverdier?	38

Introduktion

AFSNIT 1

Formål

Din intuition for klassisk fysik er super nyttig; den fortæller dig hvad der sker hvis du f.eks. slipper din taske (intuition: den falder ned) eller hvis du stikker hånden ind i dampen fra en gryde med kogende vand (intuition: det gør ondt). Denne intuition er super nyttig ikke blot i hverdagen men også når du skal prøve at forstå fysikken bag; i eksemplerne her tyngdekraft og fordampningsvarme.

Det der fascinerer mig mest ved atomer, fotoner og andre kvantesystemer er at de udfordrer vores klassiske intuition. Hvis vi prøver at bruge vores klassiske intuition til at forstå f.eks. hvordan en foton går gennem en plade med to huller, kommer vi frem til, at fotonen skal gå igennem begge huller på en gang!

Formålet med noterne her er at give dig en chance for opbygge din intuition for kvantefysik, med andre ord at give dig en kvante-intuition! Som med klassisk fysik opbygger man bedst sin intuition ved at lave forsøg. Ambitionen er at få dig så hurtigt i gang med selv at kunne udtænke, udføre og analysere kvanteforsøg som muligt. Selve forsøgene vil du lave på IBM's kvantecomputere. IBM's kvantecomputere (IBM Q) er tilgængelige online og noten her giver (forhåbentlig) både en tilstrækkelig baggrund til at komme igang med kvantefysikken og en praktisk introduktion til hvordan du logger på IBM Q og udfører kvanteforsøg.

AFSNIT 2

Hvad er kvanteteknologier?

Kvanteteknologier er en fællesbetegnelse for en række forskellige teknologier der er alle baseret på kvantefysik: kvantesensorer, kvanteinternet og kvantecomputere. Kvanteteknologier er netop nu i rivende udvikling og har potentialet til at være transformative teknologier, dvs. teknologier der fundamentalt ændrer vores samfund. Tænk opfindelsen af hjulet, vindmøller, telefonen, fly, internettet, ... så har du en god ide om hvad en transformativ teknologi er. Noten her fokuserer på kvantecomputere og den kvantefysik der indgår. Kvantecomputere er interessante fordi de potentielt kan løse problemer der er umulige selv på de hurtigste klassiske computere, f.eks. hvordan man hurtigere udvikler ny medicin der virker optimalt netop på dig, eller nye batterier så din mobil kun skal oplades én gang om året!



Figur 1. Træning af klassiske intuition, her relativ bevægelse. (Foto: K. Splittorff.)



Figur 2. Træning af kvanteintuition på IBM Q. (Foto: O.J. Joensen.)

Bits og Qubits

For at vi kan forstå hvad en kvantecomputer er skal vi helt ind i grundelementet af computeren, nemlig den klassiske bit og i kvantecomputeren en qubit.

AFSNIT 3

Bits

Grundelementet i klassiske computere, dvs. helt almindelige computere, iPads, mobiler o.s.v., er bits. En bit er en *meget* lille kontakt inde i computeren der har to indstillinger kaldet 0 og 1 (slukket og tændt på kontakten). Alle de ting en klassisk computer udfører for os er i sidste ende et resultat af at rigtigt mange af disse bits er blevet skiftet rundt mellem 0 og 1. For at have en form for billede af disse bits i en klassisk computer kan vi tænke på en bit-kugleramme hvor der kun er en kugle på hver pind (normalt er der 9 kugler på hver pind). Hver pind med en kugle svarer til en bit; hvis kuglen er til venstre er bitten 0 og er kuglen til højre er bitten 1.

Informationen i en klassisk computer bliver lagret ved at indstille kuglerne enten til venstre, vores bit er 0, eller til højre, vores bit er 1. Hvis vi f.eks. har 3 bits har vi 8 forskellige kombinationer 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Opgave 1 | Hvor mange kombinationsmuligheder er der med 4 bits? Samme spørgsmål med 10 bits og med n bits?

Som du lige har vist i opgaven vokser antallet af kombinationsmuligheder eksponentielt med antallet af bits (!) og det er rigtigt nyttigt når vi vil lagre information i en klassisk computer.

AFSNIT 4

Hvordan man udfordrer en klassisk computer

Den almindelige klassiske computer som du sikkert sidder med lige nu (husk en mobiltelefon er også en klassisk computer) er eminent til at løse opgaver så som: Her er 5 tal mellem 0 og 9: 7, 2, 1, 1, 5. Hvor mange af disse tal er større end 4? Den klassiske computer kan blot tage et tal efter det andet og checke om det er større end 4 eller ej og så tælle sammen. Den er med andre ord rigtig god til at gøre en ting efter en anden. (Ok, lige denne opgave med 5 tal kunne vi nok godt klare helt uden en computer, men hvis der nu havde været 100.000 tal og vi skulle bestemme hvor mange af dem der er større end 4 så er en klassisk computer det helt rigtige redskab.) Med lad os nu prøve med en anden type opgave

Opgave 2 | 5 tal mellem 0 og 9 udgør koden på en cykellås. Hvor mange kombinationer er der på kodelåsen?

Selv om der kun er 5 tal er opgaven med at finde den kombination der åbner låsen betydeligt mere kompleks, for der er lige pludseligt rigtigt mange kombinationsmuligheder! Opgaven viser hvor hurtigt kompleksiteten af problemer (dvs. hvor mange operationer computeren skal lave for at finde løsningen) meget ofte vokser eksponentielt, og det er netop dette der udfordrer vores klassiske computere. Selv om klassiske computere er



Figur 3. Bit kugleramme: I en klassisk computer kan hvert bit være enten 0 eller 1. På bit-kuglerammen her er alle kugler til venstre, dvs. alle 8 bits er 0. (Figur: N.A. Larsen.)



Figur 4. Cykellås med 5 cifre.

rigtigt gode til at gøre en ting efter en anden og kan gøre den enkelte ting rigtig hurtigt så kan det let tage meget lang tid hvis kompleksiteten af opgaven er meget stor.

Opgave 3 En klassisk supercomputer kan lave 10^{17} operationer i sekundet. Vi bruger den til at bryde en kodelås som den i figur 4 blot med m cifre i stedet for 5. Antag at den klassiske supercomputer kan checke 10^{17} forskellige kombinationer på låsen i sekundet. Hvor stor kan m være hvis vores klassiske supercomputer skal kunne løse problemet på et år?

Definition 1 Komplexitet af beregning: Antal operationer der skal laves for at finde løsningen på et givet problem når inputtets størrelse er m .

Opgave 4 Estimer den tid det vil tage dig, at afprøve samtlige mulige kombinationer af det tøj (incl. accessories!) du vælger imellem hver morgen.

AFSNIT 5

Kvantetilstande og Qubits

I en kvantecomputer er grundelementet en qubit og ikke en bit som i en klassisk computer. En qubit er et kvantesystem. Du er allerede stødt på et kvantesystem hvis du har arbejdet med atomfysik, for et atom er et kvantesystem! Du ved måske også fra Bohrs atommodel at atomet kan være i nogle særlige stationære tilstande $n = 1, 2, 3, \dots$. De stationære tilstande af et atom spiller en særlig rolle: Hvis atomet er i den n 'te stationære tilstand og vi måler energien så får vi energien E_n .

Her vil vi bruge notationen $|\dots\rangle$ bruges når vi beskriver et kvantesystems tilstand

Postulat 1 Et kvantesystem er beskrevet ved en tilstand der benævnes $|\dots\rangle$

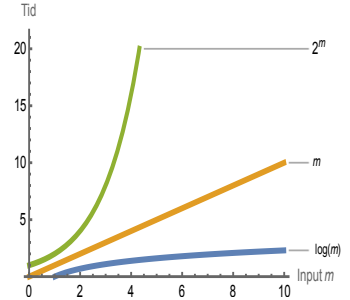
Nu tænker du måske - uha, vores notation ser lidt farlig ud¹. I så fald er du ikke den første. Så lad os lige at vænne os lidt til den med et eksempel.

Eksempel I Bohrs atom model for Hydrogenatomet er der nogle særlige stationære tilstande, i vores notation skrives de $|n\rangle$, hvor $n = 1, 2, 3, \dots$. For $n = 1$ har vi f.eks. grundtilstanden $|1\rangle$.

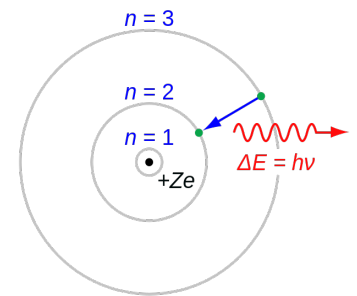
OK, nu har vi en fornemmelse af hvad et kvantesystem er og vi har notationen på plads. Lad os så prøve at finde ud af hvad en qubit er.

En qubit er det simplest mulige kvantesystem og har blot to særlige tilstande. Vi kalder de to særlige tilstande af qubit'en $|0\rangle$ og $|1\rangle$, ligesom vi kalder de to muligheder af den klassiske bit 0 og 1. Det særlige ved tilstandene $|0\rangle$ og $|1\rangle$ er at hvis vores qubit er i tilstanden $|0\rangle$ og vi måler på den med kvantecomputeren så er svaret med sikkerhed 0, tilsvarende hvis vores qubit er i tilstanden $|1\rangle$ så vil kvantecomputeren med sikkerhed måle 1.

Opsummeret har vi altså at en klassisk bit kan være 0 eller 1 og en qubit har nogle særlige tilstande $|0\rangle$ og $|1\rangle$. Bortset fra den lidt underlige notation, $|\dots\rangle$, ser dette jo ret ens ud. Men her hører ligheden mellem den klassiske bit og qubit'en også op. For mens den klassiske bit er enten 0 eller 1 så kan qubit'en i være andet end $|0\rangle$ og $|1\rangle$, den kan f.eks. også være $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$! Hvad det går ud på ser vi på i næste kapitel.



Figur 5. Tiden det tager at løse en opgave vokser forskelligt med inputtets størrelse m afhængigt af kompleksiteten af opgaven. (Figur: K. Splittorff.)



Figur 6. I Bohrs atommodel, illustreres de særlige stationære tilstande, $|n\rangle$, hvor $n = 1, 2, 3, \dots$ ofte som cirkler med atomkernen i centrum. (Figur: Wikipedia.)

Postulat: Et postulat er en af de grundlæggende antagelser som en teori bygger på.

¹Notationen er opfundet af Paul Dirac, og er helt standard i kvantefysik.

Superposition

Superposition og sammenfiltring (på engelsk entanglement) er ikke bare to helt centrale begreber i kvantefysik, de er også helt centrale for kvantecomputere. Her starter vi med en enkelt qubit og begrebet superposition.

AFSNIT 6

Superposition og normalisering

Når en qubit er i en superposition af $|0\rangle$ og $|1\rangle$ betyder det at dens tilstand er en sum af $|0\rangle$ og $|1\rangle$, eller mere præcist:

Definition 2 Superposition: $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

hvor α og β er tal.² (Det græske bogstav ψ udtales 'psi'.) En qubit kan være i en vilkårlig superposition af $|0\rangle$ og $|1\rangle$, eller i mere daglig tale, α og β kan være lige hvad de vil. Men det er afgørende at tilstanden er normaliseret

Definition 3 Qubit tilstanden $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ er normaliseret hvis $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Så der er altså en sammenhæng mellem α og β , nemlig at $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, der gør at vi ikke kan vælge dem begge helt frit.

Eksempel Tilstanden $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ er normaliseret. For at se dette ganger vi først $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ind i parentes: $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$. Vi kan nu aflæse at $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ og $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ og dermed har vi at $\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Opgave 5 Vis at tilstanden $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ er normaliseret.

Opgave 6 Vis at tilstanden $\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$ er normaliseret for en vilkårlig vinkel θ .

AFSNIT 7

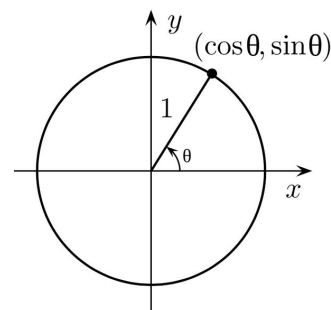
Superposition som en enhedsvektor

OK, nu ved vi hvad en superposition er og vi ved hvad normalisering er. Men det bliver hurtigt abstrakt at tænke på og det kan derfor være en god ide at lave en tegning! En måde at visualisere tilstanden af en qubit på er ved at tænke på $|0\rangle$ og $|1\rangle$ som enhedsvektorer langs x - og y -aksen i et koordinatsystem. Superpositionen $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ er så vektoren fra $(0, 0)$ i koordinatsystemet til punktet (α, β) .

Opgave 7 Tegn et koordinatsystem og indfør de fire vektorer svarende til $|0\rangle$, $|1\rangle$ og superpositionen $\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$ for $\theta = 45^\circ$ og for $\theta = 30^\circ$.

Bemærk Bemærk at en qubit kan være i uendeligt mange forskellige superpositioner af $|0\rangle$ og $|1\rangle$ simpelthen fordi vinklen θ antager uendeligt mange forskellige værdier mellem 0° og 360° når superpositionen $\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$ tager en tur rundt på enhedscirklen.

²Konstanterne α og β kan være komplekse tal. Men i denne note holder vi os til reelle tal.



Figur 7. Enhedscirklen og punktet $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. (Figur: N.A. Larsen)

Vi har lige set at vi kan tænke på de to tilstande $|0\rangle$ og $|1\rangle$ af en qubit som enhedsvektorer langs x - og y -aksen i et koordinatsystem. Hvis du har det fint med dette (indrømmet stadig ret abstrakte) billede af en qubits tilstande så gå endeligt videre. Hvis du savner et fysisk eksempel på hvad en qubit kan være så tag et kig på appendiks E inden du læser videre. Hvis du gerne vil forstå sammenhængen mellem vektorer og tilstande lidt bedre så tag et kig på appendiks H.

Måling og sandsynlighed

Hvis du måler bredden af det bord du sikkert sidder ved lige nu, så er der et korrekt svar. Bordet har den bredde det nu har og hvis du måler den tilstrækkeligt nøjagtigt så måler du den samme bredde hver gang. Dette er god klassisk fysik: den størrelse vi ønsker at måle har en bestemt værdi både før og efter vi måler den. Særligt påvirker vores klassiske måling ikke den størrelse vi måler. Men for kvantesystemer er det ikke helt så lige til.

AFSNIT 8

Måling & Sandsynlighed

Vi starter med de særlige tilstande $|0\rangle$ og $|1\rangle$: Når en qubit er i den særlige tilstand $|0\rangle$ og kvantecomputeren laver en måling så får vi 0. Dvs. at sandsynligheden³, P_0 , for at måle 0 er $P_0 = 1$ og sandsynligheden for at målingen giver 1 er $P_1 = 0$. Helt tilsvarende, hvis vores qubit er i tilstanden $|1\rangle$ og kvantecomputeren laver en måling så får vi helt sikkert 1, dvs. med sandsynligheden $P_1 = 1$. Dette er helt ligesom for vores klassiske system (bordet) og det er det der gør tilstandene $|0\rangle$ og $|1\rangle$ særlige.

Når en qubit er i superpositionen $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ så er den hverken i $|0\rangle$ eller i $|1\rangle$ den er i tilstanden $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Vektoren for tilstanden $\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$ med $\theta = 45^\circ$ du tegnede i opgaven ovenfor ligger jo heller ikke på hverken x - eller y -aksen! Det virker måske fornuftigt nok, i det mindste når vi kun tænker på tilstanden som en vektor. Men når vi nu måler på tilstanden så sker der noget højst uklassisk: Svaret bliver enten 0 eller 1 og aldrig 0.5 eller 3 for den sags skyld. Ikke nok med at svaret kun kan blive 0 eller 1, vi kan ikke forudsige om svaret vil blive 0 eller 1 (med mindre α eller β er nul)! Det eneste vi kan er at udregne sandsynligheden, P_0 , for at få 0 og sandsynligheden, P_1 , for at få 1⁴:

Definition 4 Sandsynlighed: Hvis vores qubit er i tilstanden $|\psi\rangle$ så er sandsynligheden for at måle 0 givet ved $P_0 = (\langle 0|\psi\rangle)^2$ og for at måle 1 givet ved $P_1 = (\langle 1|\psi\rangle)^2$.

Nu spørger du måske dig selv: hvad er $\langle 0|\psi\rangle$ og $\langle 1|\psi\rangle$? Det er et rigtigt godt spørgsmål, for sådan noget har vi ikke set før! Hvis vi kigger på definitionen ovenfor så må f.eks. $\langle 0|\psi\rangle$ være et tal mellem -1 og 1, for definitionen siger jo at sandsynligheden for at måle 0 givet ved $P_0 = (\langle 0|\psi\rangle)^2$ og sandsynligheden skal være et tal mellem 0 og 1. Ok, så $\langle 0|\psi\rangle$ og $\langle 1|\psi\rangle$ er nogle tal mellem -1 og 1 men hvordan regner vi dem ud?

For at regne disse sandsynligheder ud har vi brug for nogle regneregler

Definition 5 Regleregler:

$$\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1 \quad \text{og} \quad \langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0 \quad (8.1)$$

Bemærk I forrige afsnit illustrerede vi $|0\rangle$ og $|1\rangle$ som en enheds-vektorer langs hhv. x - og y -aksen i et koordinatsystem. Hvis vi bliver i den tankegang så svarer vores regneregler ovenfor

³På engelsk hedder sandsynlighed 'probability', derfor bruges bogstavet P ofte til at betegne sandsynlighed.

⁴Dette er egentligt et postulat men vi venter lige til vi ved hvad det er vi måler med at ophøje det til et postulat, se appendix B. Bemærk også at hvis α og β er komplekse skal kvadraterne, $(\dots)^2$, i definitionen udskiftes med absolut-kvadrater, $|\dots|^2$.

til at tage prikproduktet mellem to vektorer. Regnereglen $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$ betyder at vektorerne $|0\rangle$ og $|1\rangle$ har længde 1 og regnereglen $\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$ betyder at vektorerne $|0\rangle$ og $|1\rangle$ står vinkelret på hinanden. Tilsvarende siger $\langle 1|\psi\rangle$ i definitionen af sandsynligheden ovenfor hvor meget $|\psi\rangle$ peger i $|1\rangle$'s retning (længden af projektionen med fortegn).

Lad os tage et par eksempler, så vi kan se hvordan vi bestemmer sandsynligheder og hvordan regnereglerne virker.

Eksempel Vores qubit er i tilstanden $|0\rangle$ og vi vil gerne bestemme sandsynligheden, P_0 for at måle 0 og sandsynligheden, P_1 , for at måle 1.
Løsning: Vores qubit starter i tilstanden $|\psi\rangle = |0\rangle$ og vi har derfor $P_0 = (\langle 0|\psi\rangle)^2 = (\langle 0|0\rangle)^2 = 1^2 = 1$ samt $P_1 = (\langle 1|0\rangle)^2 = 0^2 = 0$.

OK, det lyder jo ikke så overraskende. Vores qubit er i tilstanden $|0\rangle$ og vi måler 0 med 100% sandsynlighed. Det er helt som det skal være for det er jo netop den særlige egenskab af $|0\rangle$. Men hvad hvis vores qubit starter i en superposition af $|0\rangle$ og $|1\rangle$?

Eksempel Vores qubit er i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ og vi vil gerne bestemme sandsynligheden, P_0 for at måle 0 og sandsynligheden, P_1 , for at måle 1.
Løsning: Vores qubit starter i tilstanden $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ og vi har derfor

$$\begin{aligned} P_0 &= (\langle 0|\psi\rangle)^2 & (8.2) \\ &= (\langle 0|\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle))^2 \\ &= \frac{1}{2}(\langle 0|(|0\rangle + |1\rangle))^2 \\ &= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle)^2 \\ &= \frac{1}{2}(1)^2 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Da $P_0 + P_1 = 1$ er $P_1 = 1 - P_0 = \frac{1}{2}$.

Så hvis vores qubit er i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ er der lige stor sandsynlighed for at måle 0 som der er for at måle 1. Men vi kan ikke forudsige om en måling vil give 0 eller 1.

Bemærk Bemærk at vi her opgiver intet mindre end det deterministiske klassiske verdensbillede! Selvom vi bisidder alt relevant viden om vores qubits tilstand, f.eks. at tilstanden er $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, kan vi ikke sige, hvad udfaldet af en måling er! Og det handler ikke om at vi bare ikke er smarte nok til at kunne forudsige udfaldet, verden er skruet sådan sammen at det er umuligt at forudsige.

Bemærk I eksemplet ovenfor stødte vi på sådan noget som f.eks. $\langle 1|\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$. Her kan tallet $\frac{1}{\sqrt{2}}$ bare sættes udenfor så vi får $\langle 1|\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dette er igen helt ligesom med prikproduktet for vektorer.

Opgave 8 Bestem P_0 og P_1 hvis vores qubit til en start er i tilstanden $|\psi\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$. Check at $P_0 + P_1 = 1$ uanset hvilken værdi af θ du vælger.

Som du sikkert allerede har indset kunne vi lige så godt have skrevet Definition 4 som

Definition 6 Sandsynlighed: Hvis vores qubit er i tilstanden $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ så er sandsynligheden for at måle 0 givet ved $P_0 = \alpha^2$ og for at måle 1 givet ved $P_1 = \beta^2$.

Bemærk Bemærk at normaliseringsbetingelsen $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ svarer til at $P_0 + P_1 = 1$, dvs. at hvis vi lægger sandsynligheden for at måle 0 sammen med sandsynligheden for at måle 1 så får vi 1. Eller med andre ord at der er 100% sandsynlighed for enten at få 0 eller at få 1, når vi måler. Det lyder jo fornuftigt nok da 0 og 1 er de eneste mulige udfald af vores måling.

Opgave 9 Vis at Definition 6 følger af Definition 4: Start med at antage at vores qubit er i tilstanden $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ og benyt så Definition 4 til at bestemme P_0 og P_1 .

Hvis du er nysgerrig efter hvad det er vi måler og hvordan dette fungerer matematisk så tag et kig på appendix B.

AFSNIT 9

Hvad sker der når vi måler på en tilstand?

Når du kigger op og ser en af dine venner komme hen mod dig måler dine øjne og hjerne din vens position og hastighed. Inden du kiggede op var din ven selvfølgelig også på vej hen mod dig med denne hastighed og fra netop denne position. Dette er god klassisk fysik, din ven har en klassisk tilstand beskrevet ved position og hastighed og du kan måle denne tilstand. Men for kvantesystemer (og dermed qubits) er verden anderledes.

Vi har allerede set at når en qubit er i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ og vi måler så får vi 0 eller 1 med lige stor sandsynlighed. Men bemærk:

Bemærk En måling på tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ afslører ikke hvad tilstanden var inden vi målte. Hvis vi f.eks. målte 1 kunne tilstanden også have været $|1\rangle$ eller $\frac{1}{5}(3|0\rangle + 4|1\rangle)$ for i begge tilfælde er sandsynligheden for at måle 1 forskellig fra nul. (Hvis du ikke er chokeret af dette så prøv at læse det en gang til og tænk over hvad du lige læste!)

Opgave 10 Vis at tilstanden $\frac{1}{5}(3|0\rangle + 4|1\rangle)$ er normaliseret og bestem sandsynligheden, P_1 , for at måle 1 hvis qubit'en starter i tilstanden $|\psi\rangle = \frac{1}{5}(3|0\rangle + 4|1\rangle)$.

Men ikke nok med at vi ikke ud fra en måling kan bestemme hvad tilstanden af qubit'en var inden vi målte, målingen påvirker også qubit'ens tilstand! Hvis vi f.eks. måler og får svaret 1 så er qubit'en efter målingen i tilstanden $|1\rangle$. Tilsvarende hvis målingen giver 0 så er tilstanden umiddelbart efter målingen $|0\rangle$.

Definition 7 Hvis vi måler og resultatet er 0, så er tilstanden af qubit'en umiddelbart efter målingen tilstanden $|0\rangle$. Tilsvarende hvis resultatet af målingen er 1, så er tilstanden af qubit'en umiddelbart efter målingen tilstanden $|1\rangle$.

Bemærk Bemærk at vi generaliserer denne definition og ophøjer den til et postulat i appendix C.

Eksempel Hvis vores qubit starter i tilstanden $\frac{1}{5}(3|0\rangle + 4|1\rangle)$ og vi måler, så kan vi få enten 0 eller 1 (da $\alpha = \frac{3}{5}$ og $\beta = \frac{4}{5}$ begge er forskellige fra nul er sandsynlighederne $P_0 = \alpha^2$ og $P_1 = \beta^2$ begge forskellige fra nul). Hvis målingen giver 0 er tilstanden efter målingen $|0\rangle$ og hvis vi får 1 er tilstanden efter målingen $|1\rangle$.

Bemærk **Kollaps af tilstand:** Når den tilstand vi starter med bliver til enten $|0\rangle$ eller $|1\rangle$ efter målingen, siger vi at start tilstanden er *kollapset*. Ordet kollaps henviser til at vores qubit før målingen kan starte i en superposition af $|0\rangle$ og $|1\rangle$ (lige som i eksemplet ovenfor) og at den efter målingen vil være i enten $|0\rangle$ eller $|1\rangle$.



Figur 8. "I like to think the moon is there even if I am not looking at it.- Albert Einstein. (Foto: Wikipedia.)

Hvis vi prøver at bruge vores klassiske intuition til at give mening til dette svarer det til at det først var da du kiggede op at din vens position og hastighed blev fastlagt!⁵

⁵Hvis du syntes at dette virker underligt så er du i godt selskab. Einstein, mente at der var noget galt med kvantemekanik. Når man tænker på at han havde trænet sin intuition ved at udarbejde relativitetsteorien kan man godt forstå at kvantemekanikken stred mod hans intuition, for i relativitetsteorien tog han udgangspunkt i en reel fysisk begivenhed. (Ultra kort fortalt beskriver den specielle relativitetsteori hvordan en reel fysisk begivenhed ser ud alt efter hvor hurtigt den der observerer bevæger sig.)

Sammenfiltrering

Indtil nu har vi set på en enkelt qubit, hvad dens tilstand kan være og hvad der sker når vi laver en måling på denne ene qubit. Som vi har set påvirker en måling qubit'ens tilstand: tilstanden kollapser til enten $|0\rangle$ eller $|1\rangle$ når vi måler.

En kvantecomputer er først for alvor interessant når den har (meget) mere end en qubit (en klassisk computer med en enkelt bit er heller ikke synderligt anvendelig!). Når vi har to eller flere qubits åbner det for en helt ny kvantemekanisk mulighed kaldet *sammenfiltrering*. Det er denne sammenfiltrering der for alvor adskiller en kvantecomputer fra en klassisk computer, for når flere qubits er sammenfiltrede, vil en måling på en qubit påvirke den samlede tilstand af de qubits den er filtret sammen med.

AFSNIT 10

Sammenfiltrering af to qubits

Lad os holde os til to qubits: Hvis vi skal beskrive den samlede tilstand af disse to så kunne man let tro at det var nok at beskrive de to qubits hver for sig. Her er først 2 eksempler hvor dette går godt:

Eksempel | To qubits (*ikke sammenfiltrede*): Hvis qubit 1 er i tilstanden $|0\rangle$ og qubit 2 er i tilstanden $|1\rangle$ så er den samlede tilstand af de to qubits $|1\rangle|0\rangle = |10\rangle$.

Bemærk Bemærk at qubit 1 er længst til højre i $|10\rangle$ og qubit 2 er til venstre. ($|10\rangle$ læses altså fra højre mod venstre.)

Opgave 11 | To qubits er i tilstanden $|01\rangle$. Hvilken tilstand er den første og den anden qubit i?

Eksempel | To qubits (*ikke sammenfiltrede*): Hvis qubit 1 er i tilstanden $|0\rangle$ og qubit 2 er i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ så er den samlede tilstand af de to qubits $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$.

I disse eksempler er vores to qubits *ikke* sammenfiltrede. Vi kan derfor skrive den samlede tilstand, $|\psi_{\text{samlet}}\rangle$, af de to qubits som et produkt $|\psi_{\text{samlet}}\rangle = |\psi_2\rangle|\psi_1\rangle$ af den første qubits tilstand $|\psi_1\rangle$ og den anden qubits tilstand $|\psi_2\rangle$. Men dette er ikke muligt hvis de to qubits er sammenfiltrede. Lad os starte med et eksempel:

Eksempel | To qubits er i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$. De er *sammenfiltrede* fordi den første qubits tilstand afhænger af den andens. Hvis den første qubit er 1 er den anden 0 og omvendt hvis den første er 0 er den anden 1. Sagt på en anden måde, man kan ikke skrive tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$ som et produkt af to tilstande $|\dots\rangle|\dots\rangle$.

Definition 8 | To qubits er sammenfiltrede hvis den ene qubits tilstand afhænger af den andens. Når to qubits er sammenfiltrede er det **ikke** muligt at skrive den samlede tilstand som et produkt af en tilstand for den første og den anden qubit.

Lad os tage et par eksempler mere

Eksempel | To *ikke sammenfiltrede* qubits: To qubits i tilstanden $\frac{1}{5}(3|01\rangle + 4|11\rangle)$ er ikke sammenfiltrede for vi kan skrive $\frac{1}{5}(3|01\rangle + 4|11\rangle) = \frac{1}{5}(3|0\rangle + 4|1\rangle)|1\rangle$.

Eksempel | To *sammenfiltrede* qubits: To qubits i tilstanden $\frac{1}{5}(3|00\rangle + 4|11\rangle)$ er sammenfiltrede.

For bare at få en lille smule mere matematisk hold på vores to qubit tilstande og sammenfiltrering, så lad os opskrive den mest generelle to qubit tilstand. Vi starter fra to generelle en qubit tilstande $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ og $\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$, hvor γ og δ er tal lige som α og β . Den mest generelle to qubit tilstand vi kan skrive som et produkt af to en qubit tilstande er

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) = \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle. \quad (10.1)$$

Ingen af disse tilstande er sammenfiltrede, vi kan jo netop skrive dem som et produkt. Men der er tilstande der ikke kan skrives på denne form og det er de tilstande der er sammenfiltrede. Lad os se på eksemplet lige ovenfor igen.

Eksempel | To *sammenfiltrede* qubits (igen): To qubits i tilstanden $\frac{1}{5}(3|00\rangle + 4|11\rangle)$ er sammenfiltrede. Ok, hvis $\frac{1}{5}(3|00\rangle + 4|11\rangle)$ er sammenfiltret, betyder det at denne tilstand *ikke* kan skrives som $(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle)$ uanset hvilke α , β , γ og δ vi vælger. Ok, lad os se om vi kan overbevise os selv om at det er sandt. Vi starter med at antage at vi kan skrive $\frac{1}{5}(3|00\rangle + 4|11\rangle) = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle)$ og prøver så komme til en modstrid. I tilstanden $\frac{1}{5}(3|00\rangle + 4|11\rangle)$ optræder $|01\rangle$ ikke, med andre ord så er tallet foran $|01\rangle$ nul. Vi har derfor fra ligning (10.1) at $\alpha\delta = 0$. Altså må enten α eller δ være nul. Men α kan ikke være nul for vi skal have at $\alpha\gamma|00\rangle = \frac{1}{5}3|00\rangle$. Vi slutter altså at $\delta = 0$ (husk at enten α eller δ skal være nul), men det betyder at $\beta\delta = 0$ og det går ikke for vi skal have at $\beta\delta|11\rangle = \frac{1}{5}4|11\rangle$. Vi har dermed den forventede modstrid, og konkluderer at tilstanden $\frac{1}{5}(3|00\rangle + 4|11\rangle)$ er sammenfiltret.

Opgave 12 | Afgør hvilke af følgende tilstande for to qubits $|11\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |00\rangle)$ og $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |11\rangle)$ der er sammenfiltrede.

Bemærk Fortvivl ikke hvis du ikke lige kan gennemskue om en tilstand af to qubits er sammenfiltret eller ej. Det kræver f.eks. øvelse at gennemskue at tilstanden $\frac{1}{2}(|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle + |11\rangle)$ kan skrives som $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ og dermed *ikke* er sammenfiltret.⁶

AFSNIT 11

Måling på sammenfiltret tilstand

Nu kommer vi til en af de ting der har givet anledning til meget af den mystik der omgærder kvantemekanik, nemlig hvad der sker når vi måler på en sammenfiltret tilstand. Det er matematisk set ret lige til, men konsekvenserne er meget uklassiske og dermed kontraintuitive.

Lad os starte med at se på to qubits der *ikke* er sammenfiltrede og lave en måling herpå.

Eksempel | Måling på *ikke* sammenfiltrede qubits: Vores to qubits er i tilstanden $|01\rangle$. Hvis vi måler på den første (husk at det er den længst til højre) så er udfaldet med 100% sandsynlighed 1, og efter målingen er tilstanden uændret for det første qubit var jo også i tilstanden $|1\rangle$ før målingen. Hvis vi i stedet måler på den anden qubit så bliver svaret 0 og tilstanden er igen uændret $|01\rangle$.

Som eksemplet viser påvirker en måling på en qubit ikke den anden qubits tilstand hvis de to qubits ikke er sammenfiltrede. Men hvad hvis de er sammenfiltrede?

⁶Der er selvfølgelig opfundet matematiske teknikker til at afgøre om en generel n -qubit tilstand er sammenfiltret eller ej, men dem må du have til gode til en anden gang.

Eksempel Måling på sammenfiltrede qubits: To qubits i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Hvis vi måler på den første så er udfaldet med 50% sandsynlighed 1, og med 50% sandsynlighed 0. Hvis vi måler 0 på den første qubit så er tilstanden af den første qubit efter målingen $|0\rangle$. Derfor er tilstanden af de to qubits efter målingen $|10\rangle$ (husk igen at den første qubit står længst til højre). Hvis vi efterfølgende måler den anden qubit så får vi derfor med 100% sandsynlighed 1. Omvendt hvis målingen på den første qubit giver 1 så er tilstanden af de to qubits efter målingen $|01\rangle$ og så vil en efterfølgende måling med 100% sandsynlighed give 0.

Eksemplet viser at når vi måler på en af de to sammenfiltrede qubits så påvirker vi den anden qubits tilstand.

Opgave 13 To qubits er i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. Hvad er sandsynligheden for at en måling på den første qubit giver hhv. 0 og 1? Hvis vi måler på den første qubit og udfaldet er 1, hvad er så tilstanden af de to qubits umiddelbart efter målingen?

Opgave 14 To qubits er i tilstanden $\frac{1}{5}(3|01\rangle - 4|10\rangle)$. Vil en måling på den anden qubit påvirke den første qubits tilstand?

Når to qubits er sammenfiltrede påvirker målingen på den ene den andens tilstand! Dette sker også selvom de to qubits er placeret langt fra hinanden, så længe de er sammenfiltrede påvirker en måling på den ene den anden instantant (dvs. uden forsinkelse). Einstein var langt fra glad ved dette og kaldte det for "Spooky action at a distance". Men virkningen er helt reel og vi vil lave forsøg på IBM's kvantecomputer der viser effekten af sammenfiltring.

Operatorer & Diagrammer

Når vi om lidt kaster os over at bruge IBM's kvantecomputere så får vi brug for at give den nogle instrukser der fortæller hvilket eksperiment vi vil have den til at udføre. Instrukserne bliver givet i form af operatorer der ændrer og sammenfiltrer de qubits vi laver forsøg med. Vi starter med de simpleste operatorer der virker på en enkelt qubit og ser derefter på en operator der virker på to qubits ad gangen. Vi vil bruge diagrammer til at visualisere, hvordan operatorerne virker. Det er de samme diagrammer der f.eks. bliver brugt når vi instruerer IBM Q.

AFSNIT 12

Enkelt qubit operatorer

Vi starter med en enkelt qubit, som vi illustrerer med en horisontal linje, se figur 9.

$$|0\rangle \text{ ————— } |0\rangle$$

Figur 9. En qubit angives ved en horisontal linje. Vi har i hver ende angivet hvilken tilstand qubit'en er i. Her er der ikke indsat nogen operator så qubit'ens tilstand ændres ikke.

Lad os også lige få på plads hvad en operator er.

Definition 9 Operator: En operator virker på en tilstand og giver en tilstand tilbage.

Hvis en operator virker på vores qubit kan den ændre qubit'ens tilstand. En af de simpleste operatorer er Z

Definition 10 Operatoren Z : $Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$

Operatoren Z 's indvirken på tilstandene $|0\rangle$ og $|1\rangle$ kan illustreres sådan her

$$\begin{aligned} |0\rangle & \text{ — } \boxed{Z} \text{ — } |0\rangle \\ |1\rangle & \text{ — } \boxed{Z} \text{ — } -|1\rangle \end{aligned}$$

Figur 10. Operatoren Z virker på en qubit. Diagrammet læses fra venstre mod højre. Som formel vil det samme se sådan ud $Z|0\rangle = |0\rangle$ og $Z|1\rangle = -|1\rangle$.

Bemærk Bemærk at rækkefølgen er afgørende: $|0\rangle\langle 0|$ er en operator og er *ikke* det samme som $\langle 0|0\rangle$ der er et tal $\langle 0|0\rangle = 1$.

Bemærk Diagrammerne er super nyttige, men vær opmærksom på at de læses fra venstre mod højre. Det gør at rækkefølgen af operatorer og tilstande ikke helt ser ud som når man skriver diagrammet som en formel. Der er givet et eksempel i figur 10.

Eksempel | Lad os prøve at se hvordan operatoren Z matematisk virker på tilstanden $|0\rangle$, med

andre ord vil vi udregne $Z|0\rangle$. Vi indsætter definitionen af $Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ og får

$$\begin{aligned} Z|0\rangle &= (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)|0\rangle \\ &= (|0\rangle\langle 0|0\rangle - |1\rangle\langle 1|0\rangle) \\ &= (|0\rangle 1 - |1\rangle 0) \\ &= |0\rangle, \end{aligned}$$

helt som i figur 10.

Opgave 15 Brug definitionen af Z , dvs at $Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ og lad den virke på $|1\rangle$. Vis at resultatet er som i figur 10.

Eksempel Lad os se hvad der sker når vi lader Z virke på tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Vi skal altså udregne $Z(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle))$. Operatorer virker lineært, dvs. at vi bare kan lade Z virke ind på hvert led, lige som hvis vi ganger ind i en parentes. $Z(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z|0\rangle + Z|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.

Den næste operator vi vil kigge på er X operatoren, der bytter om på 0 og 1:

Definition 11 Operatoren X : $X = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$

$$|0\rangle \longrightarrow \boxed{X} \longrightarrow |1\rangle$$

$$|1\rangle \longrightarrow \boxed{X} \longrightarrow |0\rangle$$

Figur 11. Operatoren X virker på en qubit sådan her. Husk at diagrammet læses fra venstre mod højre.

Opgave 16 Vis hvad der sker når X virker på tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Hvis du har studeret appendix B så bemærk at du netop har vist, at $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ er en egentilstand for X med egen værdi 1!

Den sidste operator der kun virker på en enkelt qubit, som vi får brug for, er H , kendt som Hadamard operatoren. Denne operator er helt central når vi vil sætte en qubit i en superposition og er defineret således.

Definition 12 Operatoren H : $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)$

Det kan godt være lidt udfordrende at gennemskue hvad H gør ud fra denne definition så lad os tage et kig på et diagram også:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |1\rangle &\longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \end{aligned}$$

Figur 12. Hadamard operatoren H virker på en qubit.

Eksempel I figur 12 kan vi se at $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Vi checker lige at det er rigtigt (det er

rigtigt men det er god øvelse at checke):

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)|0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0|0\rangle + |0\rangle\langle 1|0\rangle + |1\rangle\langle 0|0\rangle - |1\rangle\langle 1|0\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \end{aligned}$$

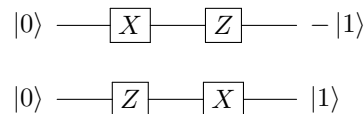
Opgave 17 Vis, at $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.

Opgave 18 Vis, at $H\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |0\rangle$ og at $H\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |1\rangle$.

Operatorer kan også virke den ene efter den anden, men som eksemplet her viser er det vigtigt at holde styr på rækkefølgen (den kummutative lov vi kender fra at gange tal sammen gælder altså **ikke** her). Lad os tage et eksempel.

Eksempel Vi prøver at udregne både $HX|0\rangle$ og $XH|0\rangle$ for at se om de giver det samme eller hvert sit resultat. Vi starter med $HX|0\rangle$: Først lader vi X virke, $HX|0\rangle = H|1\rangle$, og så lader vi H virke, $HX|0\rangle = H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$. OK, det var den første udregning. Men hvad hvis vi gør det i den omvendte rækkefølge, dvs. udregner $XH|0\rangle$? Så får vi, $XH|0\rangle = X\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Hvilket *ikke* er det samme som vi fik for $HX|0\rangle$. Så rækkefølgen af operatorerne er vigtig!

Opgave 19 Prøv at udregne $XZ|0\rangle$ og $ZX|0\rangle$. Du vil se at dine to udregninger *ikke* giver samme resultat!



Figur 13. Rækkefølgen af operatorer er vigtig: $XZ|0\rangle$ er *ikke* det samme som $ZX|0\rangle$.

AFSNIT 13

Operatorer der virker på to qubits ad gangen

De operatorer vi har introduceret indtil nu virker på en enkelt qubit. Når vi skal sammenfiltre to (eller flere) qubits får vi brug for operatorer der virker på to qubits på en gang. Her holder vi os til CNOT operatoren, men den kommer også i hele to versioner!

Definition 13 *CNOT* operatoren:

Med det første qubit som kontrolqubit

$$CNOT_{0 \rightarrow 1} = |00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 11|$$

Med det andet qubit er kontrolqubit

$$CNOT_{1 \rightarrow 0} = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 11|$$

Bemærk Det ser lidt voldsomt ud og kan være lidt forvirrende, men bemærk at alt *CNOT* gør er følgende: Hvis vores kontrolqubit er 0 gør *CNOT* ingenting og hvis vores kontrolqubit er 1 så anvender den *X* på den anden qubit (hvilket flipper værdien af den qubit). Bemærk at der ikke sker noget med vores kontrolqubit.

Lad os prøve at blive lidt klogere på hvordan $CNOT$ virker med et eksempel.

Eksempel Vi ser hvad der sker når $CNOT$ virker på tilstanden $|01\rangle$ og vælger her den anden qubit som kontrolqubit.

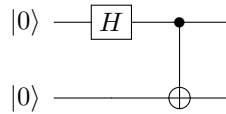
$$\begin{aligned} CNOT_{1 \rightarrow 0}|01\rangle &= (|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 11|)|01\rangle \\ &= |00\rangle\langle 00|01\rangle + |01\rangle\langle 01|01\rangle + |11\rangle\langle 10|01\rangle + |10\rangle\langle 11|01\rangle \\ &= |00\rangle 0 + |01\rangle 1 + |11\rangle 0 + |10\rangle 0 \\ &= |01\rangle \end{aligned}$$

Ja, OK der skete jo ikke rigtigt noget. Men hvad nu hvis:

Eksempel Vi lader $CNOT$ virke på tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |00\rangle)$ (denne gang har vi valgt det første qubit som kontrolqubit)

$$\begin{aligned} CNOT_{0 \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |00\rangle) & \quad (13.1) \\ &= (|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 11|) \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |00\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |00\rangle) \end{aligned}$$

Nu skete der noget! Vi gik fra tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |00\rangle)$ der *ikke* er sammenfiltret til tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |00\rangle)$ der er sammenfiltret!

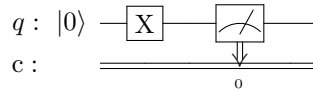


Figur 14. Diagrammet viser hvordan vi v.h.a. en Hadamard- og en CNOT-operator kan skabe den sammenfiltrede tilstand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |00\rangle)$. Prikken i CNOT-operatoren angiver kontrolqubit'en, og den anden ende der ligner et sigtekorn peger på den qubit som CNOT-operatoren gør noget ved (target qubit). Det er altså $CNOT_{0 \rightarrow 1}$ der er brugt i figuren ovenfor.

AFSNIT 14

Diagrammer med målinger

Inden vi kaster os over IBM Q er det nyttigt også lige at få målinger med ind i vores diagrammer så vi kan illustrere et helt kvantekredsløb.

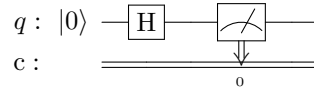


Figur 15. Et kvantekredsløb med en qubit q (den øverste linje) og en klassisk bit c (den nederste dobbeltlinje). Den klassiske bit bruges til at gemme resultatet af målingen på qubit'en. Det lille 0 der hvor pilen peger ned på den klassiske bit betyder at vi gemmer resultatet i den klassiske bit nummer 0 (ikke at resultatet er nul, som man ellers godt kunne tro!).

Eksempel Vores første kvantekredsløb er illustreret i figur 15. I kredsløbet er der en enkelt qubit q der til en start er i tilstanden $|0\rangle$ (husk at diagrammerne læses fra venstre

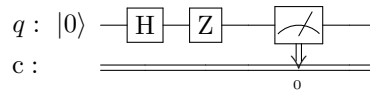
mod højre). Derefter virker operatoren X på vores qubit. Tilstanden derefter er altså $X|0\rangle$. Kredsløbet afsluttes med at vi laver en måling og gemmer svaret i det 0'te klassiske bit c .

Opgave 20 | Forudse hvad målingen i figur 15 ovenfor vil eller kan give.



Figur 16. I dette kvantekredsløb lader vi Hadamard operatoren H virke på en enkelt qubit og måler derefter på tilstanden.

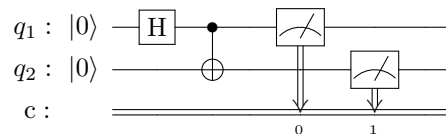
Eksempel | I kvantekredsløbet i figur 16 virker vi med H på qubit'en der til en start er i tilstanden $|0\rangle$. Efter H har virket er qubit'en i tilstanden $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Vi laver afslutningsvis en måling. Sandsynligheden for at målingen giver 0 er $(\langle 0 | \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle))^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle))^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1+0))^2 = \frac{1}{2}$. Da den eneste anden mulighed er at målingen giver 1 må sandsynligheden derfor også være $\frac{1}{2}$; ellers ville summen af sandsynlighederne ikke give 1. Det er god øvelse lige at checke ved at beregne eksplicit: sandsynligheden for at målingen giver 1 er $(\langle 1 | \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle))^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 1|0\rangle + \langle 1|1\rangle))^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}(0+1))^2 = \frac{1}{2}$, som forventet.



Figur 17. Her starter vores ene qubit i tilstanden $|0\rangle$ og vi lader vi først operatoren H og dernæst operatoren Z virke på tilstanden. Endeligt udfører vi en måling på tilstanden.

Opgave 21 | Opgaven her er at forstå diagrammet i figur 17. Vores qubit starter i tilstanden $|0\rangle$. Forklar hvad tilstanden af vores qubit er efter H og dernæst Z har virket på den, dvs udregn $ZH|0\rangle$. Bestem derefter hvad sandsynligheden er for at målingen giver hhv. 0 og 1.

Vi slutter af med et eksempel på et diagram hvor vi måler på en sammenfiltret tilstand.



Figur 18. Her udfører vi målinger på den sammenfildrede tilstand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |00\rangle)$. Husk at den operator der for binder de to qubits er en CNOT operator og at kontrolbitten er i den ende med prikken.

Eksempel | I figur 18 laver vi målinger på hver af de to qubits der før målingerne er i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |00\rangle)$. Målingen på den første qubit vil med 50% sandsynlighed give 0. Hvis målingen giver 0 er tilstanden af den første qubit efter målingen $|0\rangle$. Derfor er den

Samlede tilstand af de to qubits $|00\rangle$ efter vi har målt 0 på den første qubit. Nu måler vi den anden qubit og får med 100% sandsynlighed 0 da den anden qubit er i tilstanden $|0\rangle$.

IBM Q

Kvantecomputere er ikke en fjern fremtidsdrøm, IBM har allerede udviklet en række fungerende kvantecomputere som det er muligt at lave forsøg på. Forsøgene svarer til de kvantekredsløb vi arbejdede med ovenfor. Vi kan altså selv instruere kvantecomputerne til at lave netop de forsøg vi ønsker (altså køre netop de kvantekredsløb vi selv designer). Kvantecomputerne står rundt om i verden, og vi arbejder med dem online.

AFSNIT 15

Sådan kommer du på IBM Q

Det er helt ligetil at bruge IBM's kvantecomputere. Først gå til

<https://quantum-computing.ibm.com/>

vælg sign-in, og opret en IBMid konto. Når du efterfølgende logger på har du adgang til IBM's kvantecomputere.

AFSNIT 16

Sådan får du øvelserne ind på IBM Q

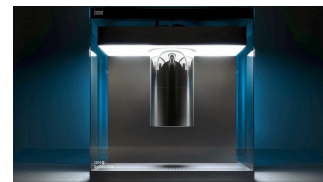
For at komme igang med de IBM Q øvelser vi arbejder med i denne note skal du gøre følgende

- 1) Download filerne fra IBM Q øvelsen på din computer.
- 2) På IBM's Quantum Computing platform, find 'Learning' og vælg herunder 'IBM quantum Lab'.
- 3) Vær tålmodig! IBM Q er ved at starte en server op til dig og det kan godt tage lidt tid. Så træk vejret dybt og tæl til 10 meget langsomt. Når du ser bien er du der næsten.
- 4) Upload filen fra øvelsen som du har på din computer til IBM's Quantum Computing platform: For at gøre dette clicker du på upload ikonet (det er en blå pil der peger op i venstre side af din skærm).

Filen med øvelsen optræder nu i listen på venstre side. Dobbelt-click på filnavnet og så åbner øvelsen i det store panel til højre. Prøv at give det et skud, det fungerer normalt uden problemer.

KAPITEL

VII



Figur 19. IBM Quantum System One, en af IBM's kvantecomputere. (Foto: IBM.)

AFSNIT 17

Sådan laver du øvelserne

IBM Q øvelsen du (forhåbentligt) sidder med foran dig nu indeholder to ting: 1) Helt almindelig tekst der introducerer øvelsen og måske giver nogle opgaver du kan løse med papir og blyant. 2) Instruktioner som du sender til kvantecomputeren. For at give kvantecomputeren instruktionerne clicker du cellen og trykker dernæst på 'play' knappen i instruktions-linjen lige over teksten ('play' knappen er den lille trekant der peger mod højre). Hvis du foretrækker at bruge dit tastatur så click på cellen og tast Shift+Return.

Bemærk Det er afgørende at du sender alle instruktionerne til IBM Q startende oppefra! Ellers ved kvantecomputeren ikke hvad det er vi beder den om.

Appendices

Appendix A: Grover

Grovers algoritme er en kvantealgoritme der kan benyttes til at søge. Hvis du f.eks. har 10.000 skuffer i din kommode og har lagt din telefon i den ene, men har glemt hvilken, så vil det være nyttigt med en søgealgoritme der kan hjælpe dig med at finde den. En almindelig computer udfører en operation efter en anden, så hvis du beder en klassisk computer om at lede efter din telefon vil den åbne en skuffe efter en anden og se om din telefon er der. Den klassiske computer kan være heldig at telefonen er i en af de første skuffer den kigger i men den kan også være uheldig at det er en af de sidste. I gennemsnit (hvis du beder den klassiske computer hjælpe dig med at finde din telefon mange gange) vil den skulle kigge i halvdelen af skufferne, dvs. den skal lave 5.000 operationer. Med Grovers algoritme kan en kvantecomputer finde telefonen med ca. 100 operationer! Hvorfor 100? Fordi antallet af operationer Grovers algoritme skal bruge er kvadratroden af antallet af skuffer og $\sqrt{10.000} = 100$.

Lad os lige opsummere inden vi kaster os over at forstå Grovers algoritme. Opgaven er at finde den rigtige (skuffe) blandt N mulige (de 10.000 skuffer). En klassisk computer vil i gennemsnit skulle bruge $N/2$ operationer (kigge i halvdelen af skufferne) for at finde den rigtige. Med Grovers algoritme vil en kvantecomputer skulle bruge $\sqrt{N}$ operationer. Kvantecomputeren er altså af størrelsesorden $N/\sqrt{N} = \sqrt{N}$ hurtigere end den klassiske computer til at søge. For små N gør dette ikke den store forskel men hvis N er stor er der meget at vinde ved at benytte en kvantecomputer.

For at gøre det lidt lettere at se på siger vi at N (antallet af skuffer) er $N = 2^n$, for et passende naturligt tal n (dvs. at n kan være 1, 2, 3, ...). Med andre ord vi kan have $N = 2$ eller $N = 4$ eller $N = 8$, Hvorfor gør $N = 2^n$ det lettere? Fordi med n qubits så er antallet af kombinationer 2^n . Eller sagt med andre ord: Vi kan give de N skuffer et tal hver $0, 1, \dots, N-1$, og udtrykke disse tal i det binære talsystem vha. n binære cifre (når $N = 2^n$). Fortvivl ikke hvis dette bliver for abstrakt, her er et par eksempler.

Vi starter med at se på hvordan Grovers algoritme virker for $N = 4$:

Eksempel

Grovers algoritme for $N = 4$: For at få en fornemmelse for Grovers algoritme så lad os gå den igennem for $N = 4$. Da $4 = 2^2$ kan vi med $n = 2$ qubits lave netop 4 kombinationer af vores særlige tilstande $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$. På de 4 skuffer skriver vi de 4 kombinationer 00, 01, 10, 11. Bemærk at 00, 01, 10, 11 blot er tallene 0, 1, 2 og 3, i det binære talsystem.

Lad os sige at den løsning vi søger (dvs. den skuffe telefonen ligger i) er 11. Opgaven for Grovers algoritme er at pege på skuffen nummer 11, så vi kan åbne den og tage telefonen. Det første skridt i Grovers algoritme er at lave tilstanden

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \quad (\text{A.1})$$

Tilstanden $|\psi\rangle$ peger lige meget på $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$. Hvis vi laver en måling på tilstanden $|\psi\rangle$ er der lige stor sandsynlighed for at resultatet er 00, 01, 10 eller 11. Grovers algoritme vil transformere $|\psi\rangle$ over i en ny tilstand der peger mere i retningen $|11\rangle$. Hvis vi efterfølgende måler på de to qubits vil vi derfor med stor sandsynlighed få 11. For at algoritmen skal kunne gøre dette bliver den selvfølgelig nødt til at få en



Figur 20. Din mobil ligger i en af de 32 skuffer. Hvor mange skuffer skal du i gennemsnit kigge i for at finde din mobil?

eller anden form for input om hvad løsningen er, og dette får den fra en operator som vi kalder O . Det første Grovers algoritme gør ved $|\psi\rangle$ er at lade en operatoren O virke på tilstanden. Operatoren $O = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| - |11\rangle\langle 11|$ vender fortegnet på den koefficient der står foran $|11\rangle$ i den tilstand den virker på. Grover starter med at lade O virke på $|\psi\rangle$

$$O|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) . \quad (\text{A.2})$$

Derefter lader Grovers algoritme operationen $(2|\psi\rangle\langle\psi| - I)$ virke på tilstanden. (Identitets operatoren, I , giver den samme tilstand tilbage som den virker på.) Sammenfatter vi de to første skridt i algoritmen har vi

$$(2|\psi\rangle\langle\psi| - I)O|\psi\rangle \quad (\text{A.3})$$

Den samlede operation kalder vi G , efter Grover, dvs. $G = (2|\psi\rangle\langle\psi| - I)O$.

$$G|\psi\rangle = (2|\psi\rangle\langle\psi| - I)O|\psi\rangle . \quad (\text{A.4})$$

Nu kunne vi blot skrive ud hvad $|\psi\rangle$ er og regne løs. Dette kan godt lade sig gøre for $N = 4$, selvom der kommer mange led. Men der er mere fiks måde at gøre det på som hjælper os når N bliver større: Tricket er at lave følgende omskrivning

$$\begin{aligned} O|\psi\rangle &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) - |11\rangle \\ &= |\psi\rangle - |11\rangle . \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Det andet skridt kan måske forvirre, men bemærk at vi blot bruger at $-\frac{1}{2}|11\rangle = \frac{1}{2}|11\rangle - |11\rangle$. Benytter vi nu dette har vi at

$$\begin{aligned} G|\psi\rangle &= (2|\psi\rangle\langle\psi| - I)(|\psi\rangle - |11\rangle) \\ &= 2|\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle - I|\psi\rangle - 2|\psi\rangle\langle\psi|11\rangle + I|11\rangle \\ &= 2|\psi\rangle - |\psi\rangle - 2|\psi\rangle\frac{1}{2} + |11\rangle \\ &= |11\rangle . \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Vi har virket en gang med Grovers G og tilstanden $|\psi\rangle$, der peger lige meget i alle 4 retninger, er i stedet blevet til tilstanden $|11\rangle$ der peger lige på den løsning vi søger! Det eneste vi mangler er at lave en måling på vores to qubits, så får vi med 100% sandsynlighed 11 hvilket fortæller os at vi skal kigge i den skuffe.

Bemærk

Men hov, er det ikke snyd at løsningen, her 11, bliver puttet ind i operatoren O ? Jo, hvis vi ser O som en del af algoritmen vi selv laver. Men hvad hvis vi ser O som noget en anden har lavet og vores opgave med Grovers algoritme er at finde løsningen (der er puttet ind i O) med så få operationer som muligt? Lidt ligesom '20 spørgsmål til professoren': i den lej gælder det om at finde ud af hvad 'professoren' tænker på. F.eks. kunne hun tænke på en kvantecomputer og man skal stille hende så få spørgsmål som muligt (max 20) for at finde ud af hvad hun tænker på og hun må kun svare ja og nej. Tilsvarende søger Grovers algoritme at bruge så få operationer som muligt, og hver gang ' O ' anvendes må den alene vende fortegnet på koefficienten foran den løsning der er puttet ind i ' O ' (operatoren O kaldes for et orakel af samme grund).

Eksemplet med $N = 4$ ($n = 2$) giver os en første ide om hvordan Grovers algoritme virker. Inden vi går videre bliver vi nødt til at indføre lidt mere notation for når n bliver

større bliver det lynhurtigt rigtigt bøvlet at skrive alle tilstandene op. Så for at lette notationen skriver vi i stedet de $N = 2^n$ tilstande som $|0\rangle, |1\rangle \dots |N-1\rangle$. I eksemplet ovenfor ville vi altså have skrevet $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ i stedet for $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$. Når vi nu går til $N = 8$ skriver vi $|0\rangle, |1\rangle, \dots |7\rangle$ i stedet for $|000\rangle, |001\rangle, \dots |111\rangle$.

Eksempel | **Grovers algoritme for $N = 8$:** Vi starter igen fra en lige superposition over tilstande

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}(|0\rangle + |1\rangle + \dots + |6\rangle + |7\rangle) \quad (\text{A.7})$$

Lad os sige at løsningen er 7, men det er ikke afgørende, det er kun oraklet, O , der ved dette. Oraklet vender igen fortegnet på den koefficient der står foran $|7\rangle$. Vi lader O virke på $|\psi\rangle$ og laver igen den fikse omskrivning heraf:

$$O|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}(|0\rangle + |1\rangle + \dots + |6\rangle - |7\rangle) = |\psi\rangle - \frac{2}{\sqrt{8}}|7\rangle. \quad (\text{A.8})$$

Vi lader nu $(2|\psi\rangle\langle\psi| - I)$ virke på $O|\psi\rangle$

$$\begin{aligned} G|\psi\rangle &= (2|\psi\rangle\langle\psi| - I)O|\psi\rangle \\ &= (2|\psi\rangle\langle\psi| - I)(|\psi\rangle - \frac{2}{\sqrt{8}}|7\rangle) \\ &= 2|\psi\rangle - |\psi\rangle - 2|\psi\rangle\frac{2}{8} + \frac{2}{\sqrt{8}}|7\rangle \\ &= \frac{1}{2}|\psi\rangle + \frac{2}{\sqrt{8}}|7\rangle \\ &= \frac{1}{2}|\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|7\rangle \\ &= \frac{1}{2\sqrt{8}}(|0\rangle + |1\rangle + \dots + |6\rangle) + (\frac{1}{2\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{2}})|7\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Efter at have anvendt Grovers G en gang finder vi derfor sandsynligheden for at måle 7

$$P_7 = (\langle 7|G|\psi\rangle)^2 = (\frac{1}{2\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{25}{32} = 0.78125 \quad (\text{A.10})$$

Allerede efter at have ladet G virke en gang på $|\psi\rangle$ får vi en tilstand hvor der er over 78% sandsynlighed for at en måling giver det rette svar. Lader vi algoritmen køre en gang mere, svarende til at vi udregner $G^2|\psi\rangle$ finder vi herefter at $P_7 = 0.945312$, eller med andre ord at Grovers algoritme med næsten 95% sandsynlighed peget på den rette løsning. Det er en fin øvelse at check dette, så prøv gerne selv!

Bemærk forskellen mellem de to eksempler: For $N = 4$ er vi heldige og finder faktisk den rette løsning med 100% sandsynlighed efter at have anvendt G en gang på $|\psi\rangle$. For $N = 8$ anvender vi G to gange på $|\psi\rangle$ og får en tilstand hvor der er næsten 95% sandsynlighed for at en måling vil give os et svar der peger på den rette løsning. Eksemplet med $N = 8$ svarer til det der sker for et generelt N .

Grovers algoritme for generelt $N = 2^n$: Start med tilstanden

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle \quad (\text{A.11})$$

Lad os sige at løsningen er $k = N - 1$, så oraklet, O , vender fortegnet på koefficienten

foran $|N-1\rangle$ i den tilstand O virker på. Som i eksemplerne ovenfor gør vi nu følgende

$$G|\psi\rangle = (2|\psi\rangle\langle\psi| - I)O|\psi\rangle \quad (\text{A.12})$$

og vi lader G virke ca. $\sqrt{N}$ gange på $|\psi\rangle$ og måler derefter. Svaret vi får er et bud på løsningen.

Hvorfor kan G være hurtigere end en søgealgoritme på en klassisk computer? Fordi operatoren virker på en gang på alle de tilstande der er blevet sammenfiltret i en meget lang superposition! Når den gør dette kan den på en gang ændre alle koefficienter i den lange superposition. I stedet for at dykke ned i den desværre ret tunge matematik det kræver at udlede dette så lad os hellere afprøve Grovers algoritme på en kvantecomputer. Øvelsen vil forhåbentligt også gøre det lidt mere klart hvad det er for en rolle oraklet har og hvordan man i praksis konstruerer sådan et:

IBM Q 1 IBM Q øvelse med Grovers algoritme for $N = 4$ og $N = 8$.

Appendix B: Hvad er det vi måler?

Vi har set at når en qubit er i en superposition af $|0\rangle$ og $|1\rangle$ så kan vi ikke forudsige hvad vi får hvis vi laver en måling på vores qubit. Vi kan få enten 0 eller 1 men vi ved ikke med sikkerhed hvad målingen giver. Det eneste vi kan er at udregne sandsynligheden for at målingen giver 0 eller 1. Men hvad er det vi måler og hvad betyder det for systemet at vi får enten 0 eller 1?

Hvis vi tænker på de to (stationære) tilstande at et atom med lavest energi, og vi kan jo passende kalde dem $|0\rangle$ og $|1\rangle$, så vil atomet have en veldefineret energi, E_0 , hvis det er i tilstanden $|0\rangle$ og en veldefineret energi, E_1 , hvis det er i tilstanden $|1\rangle$. Energien når atomet er i en af disse (stationære) tilstande er veldefineret i den forstand at hvis vi måler energien så får vi samme resultat hver gang. Men hvad hvis vores atom er i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, hvad kan vi så sige om energien af atomet? Svaret er ganske overraskende, at vi ikke ved hvad energien af atomet er, eller mere præcist sagt vi kan ikke med sikkerhed sige hvad udfaldet vil blive hvis vi måler energien! Hvis vores atom er i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ og vi måler energien så kan svaret blive E_0 eller E_1 , og der er lige stor sandsynlighed for de to udfald.

Når vi måler energien af et atom, er det energioperatoren (som også kaldes Hamilton-operatoren) der er i spil. Når vi arbejder med qubits er der en række operatoren i spil, så lad os først lige få på plads hvad en operator er.

Definition 14 | Operator: En operator virker på en tilstand og giver en tilstand tilbage.

For at forstå dette så lad os introducere måleoperatoren

Definition 15 | Måleoperatoren: $M = 0|0\rangle\langle 0| + 1|1\rangle\langle 1| = |1\rangle\langle 1|$

Bemærk Bemærk at rækkefølgen er afgørende $|0\rangle\langle 0|$ er ikke det samme som $\langle 0|0\rangle = 1$.

Eksempel | Vi prøver først at lade operatoren M virke på tilstandene $|0\rangle$ og $|1\rangle$

$$M|0\rangle = |1\rangle\langle 1|0\rangle = 0|1\rangle \quad \text{og} \quad M|1\rangle = |1\rangle\langle 1|1\rangle = |1\rangle. \quad (\text{B.1})$$

| For at få dette i hus brugte vi regnereglerne 8.1.

Bemærk Bemærk at vi har

$$M|0\rangle = 0|0\rangle \quad \text{og} \quad M|1\rangle = 1|1\rangle. \quad (\text{B.2})$$

Dvs. at når M virker på $|0\rangle$ så får vi den samme tilstand $|0\rangle$ tilbage gange et tal, her 0. Det samme sker når vi lader M virke på $|1\rangle$ så får vi den samme tilstand $|1\rangle$ tilbage gange et tal, nu 1.⁷

Bemærkningen ovenfor er vigtig den er nemlig vores første eksempel på egentilstande og egenvektorer

Definition 16 | Egentilstand og egenværdi: Hvis en operator M virker på en tilstand $|m\rangle$ og vi får et tal, m , gange tilstanden $|m\rangle$ tilbage, dvs. hvis $M|m\rangle = m|m\rangle$, så er $|m\rangle$ en egentilstand for M med egenværdien m .

Opgave 22 | Vis at $|1\rangle$ er en egentilstand for $M = |1\rangle\langle 1|$ med egenværdi 1.

⁷Hov, snød vi ikke her? I eksemplet havde vi $M|0\rangle = 0|1\rangle$ og nu skriver vi $M|0\rangle = 0|0\rangle$! Bare rolig begge dele er korrekt da $0|0\rangle = 0|1\rangle$, hvilket du kan overbevise dig selv om er korrekt hvis du tænker på tilstandene som vektorer. Så $M|0\rangle = 0|0\rangle$ er korrekt.

Det at være en egentilstand for en operator er noget ganske særligt. Langt de fleste tilstande er ikke egentilstande

Opgave 23 Vis, at tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ ikke er en egentilstand af operatoren $M = |1\rangle\langle 1|$.

Vink: M virker lineært, dvs. $M(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(M|0\rangle + M|1\rangle)$.

Postulat 2 Målepostulat del 1: Hvis vi måler en operator M er de mulige udfald af målingen egenverdierne af M .

Eksempel Måleoperatoren M har egenverdierne 0 og 1, så hvis vi måler M kan målingen give 0 og 1.

Postulat 3 Målepostulat del 2: Hvis vores qubit er i tilstanden $|\psi\rangle$ og vi måler en operator M er sandsynligheden for at målingen giver egenverdien m af M givet ved $P_m = (\langle m|\psi\rangle)^2$, hvor $|m\rangle$ er egentilstanden af M med egenverdien m .

Eksempel Måleoperatoren M har egenverdierne 0 og 1, med de tilhørende egentilstande $|0\rangle$ og $|1\rangle$. Så hvis qubit'en er i tilstanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ og vi måler M kan målingen give 0 og 1. Sandsynligheden for at målingen giver 0 er $P_0 = (\langle 0|\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle))^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle))^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|0\rangle)^2 = \frac{1}{2}$.

Opgave 24 Vores qubit starter i tilstanden $\frac{1}{5}(3|0\rangle + 4|1\rangle)$ og vi måler måleoperatoren M . Hvad er de mulige udfald af målingen og hvad er sandsynligheden for at målingen giver disse udfald?

Nu er vi blevet klogere på hvad det er vi måler på en qubit. Hvis du savner et fysisk eksempel på hvad man kan måle så se appendix E hvor vi arbejder med måling af lys' polarisation.

Appendix C: Hvad sker der med tilstanden når vi måler en operator? (Version 2)

Hvis du har studeret appendix B og godt kunne tænke dig en lidt mere generel matematisk beskrivelse af hvad der sker med en tilstand når vi måler en operator så læs med her.

Postulat 4 Målepostulatet del 3: Hvis vi måler en operator M og resultatet er egenværdien m , så er tilstanden af qubit'en umiddelbart efter målingen egentilstanden $|m\rangle$.

Eksempel Måleoperatoren M har egentilstande $|0\rangle$ og $|1\rangle$, med egenværdier hhv. 0 og 1. Hvis vores qubit starter i tilstanden $\frac{1}{5}(3|0\rangle + 4|1\rangle)$ og vi måler M , så kan vi få enten 0 eller 1 (da 0 og 1 er egenværdierne af M). Hvis målingen giver 0 er tilstanden efter målingen $|0\rangle$ (da $|0\rangle$ er egentilstanden for M der har egenværdi 0) og hvis vi får 1 er tilstanden efter målingen $|1\rangle$.

Bemærk **Kollaps af tilstand:** Når den tilstand vi starter med bliver til egentilstanden for den operator vi måler, siger vi at start tilstanden er kollapsed til egentilstanden. Ordet *kollaps* henviser til at vores qubit før målingen kan starte i en superposition af $|0\rangle$ og $|1\rangle$ (lige som i eksemplet ovenfor) og at den efter målingen vil være i enten $|0\rangle$ eller $|1\rangle$.

Appendix D: Postulaterne samlet

Nu har vi fået alle de grundlæggende postulater som kvantemekanik bygger på banen, og man kan (indrømmet lidt kækt) sige at resten bare er et spørgsmål om at regne. Så lad os lige opsummere så vi har postulaterne samlet:

Postulat 1 Et kvantesystem er beskrevet ved en tilstand der benævnes $|\dots\rangle$

Postulat 2 Målepostulat del 1: Hvis vi måler en operator M er de mulige udfald af målingen egenverdierne af M .

Postulat 3 Målepostulat del 2: Hvis vores qubit er i tilstanden $|\psi\rangle$ og vi måler en operator M er sandsynligheden for at målingen giver egenverdien m af M givet ved $P_m = \langle m|\psi\rangle^2$, hvor $|m\rangle$ er egentilstanden af M med egenverdien m .

Postulat 4 Målepostulatet del 3: Hvis vi måler en operator M og resultatet er egenverdien m , så er tilstanden af qubit'en umiddelbart efter målingen egentilstanden $|m\rangle$.

Bemærk Ovenstående postulater blev undfanget gennem en lang process hvor man forsøgte med forskellige (og ofte forkerte) antagelser. Lad dig ikke slå ud hvis postulaterne syntes at stride mod din intuition; du har sandsynligvis ikke opbygget en kvanteintuition endnu.

Appendix E: Polarisation af lys

Hvis du har det sådan "Qubit, $|0\rangle$ og $|1\rangle$, øhhhh ...?" så er dette kapitel det helt rigtige at læse nu!

Når du sidder og kigger på din computer tænker du sikker ikke umiddelbart over at lyset fra din skærm er polariseret. Men hvis du tager et par polaroid solbriller på, se figur 21, vil du opdage at skærmen ikke bare bliver lidt mørkere (som forventet det er jo et par solbriller du har på) men hvis du drejer hovedet i en bestemt vinkel så forsvinder lyset helt!

De enkelte fotoner i en lysstråle kan være i to polarisationstilstande, og vi kan jo passende kalde dem $|0\rangle$ og $|1\rangle$. Eller rettere sagt de kan være i en superposition $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ af de to polarisationstilstande $|0\rangle$ og $|1\rangle$. Vi vil først lave 5 forsøg med disse tilstande og derefter forklare forsøgene.



Figur 21. Polaroid solbriller: Lys har to polariseringsretninger svarende til tilstandene $|0\rangle$ og $|1\rangle$. Efter lys passerer igennem et par polaroid solbriller er det polariseret i en bestemt retning - der afhænger af hvordan du holder hovedet. (Foto: Polaroid Eyewear.)

Appendix F: Eksperimenter med polarisering

Her er 5 forsøg. De første 4 skulle give dig en lidt bedre fornemmelse for hvad de disse polarisations-tilstande er og det sidste forsøg vil formodentligt få dig til at tænke *hmm-mmm Det eneste der kræves for at lave disse forsøg er 3 glas fra polaroid solbriller eller lige så godt 3 polariserings-filtre fra apparatursamlingen i jeres fysiklokaler.*

Forsøg 1: Se på din computerskærm gennem et polariseringsfilter. Lyset fra din skærm er (næsten helt sikkert) polariseret i en bestemt retning og polariseringsfilteret lader kun lys med en bestemt polarisering slippe igennem. Skærmen bliver derfor helt mørk når polariseringsfilteret er vinkelret på polariseringen af lyset fra skærmen.

Forsøg 2: Kig gennem et polariseringsfilter på lyset der kommer ind ad vinduet. Prøv at rotere polariseringsfilteret. Du vil nok se at rotationen af filteret ikke gør nogen synderlig forskel. Konklusion? I så fald er lyset fra vinduet er polariseret lige meget i alle retninger.⁸

Forsøg 3: Prøv nu at lægge en bog i lyset fra vinduet og kig på bogen gennem polariseringsfilteret. Roter igen polariseringsfilteret. Nu vil du se at lysets styrke afhænger af hvilken retning du orienterer polariseringsfilteret. (Det fungerer bedst hvis bogens omslag er sort.) Hvad kan du konkludere heraf om lyset der kommer fra bogen?

Forsøg 4: Læg to polariseringsfiltre oven på hinanden og kig gennem dem mod vinduet. Efter passagen gennem det første filter er lyset polariseret (altså lige som lyset fra din computerskærm). Det skulle altså gerne ske præcist det samme når du roterer det andet filter i.f.t. det første som der gjorde i forsøg 1. Check at det er tilfældet!

Forsøg 5: Læg de to polariseringsfiltre så polarisationsretningerne er vinkelret på hinanden. (Hvis du har gjort det, bør der ikke slippe noget lys igennem.) Tag nu et tredje polariseringsfilter, placer det foran de to andre og roter det. Beskriv hvad du observerer. Prøv også at placere det tredje polariseringsfilter bagved de andre to og beskriv hvad du observerer. Prøv til sidst at placere det tredje filter mellem de to andre og roter det (det første og andet skal stadig være placeret som vi startede med). Beskriv igen hvad du observerer!



Figur 22. Effekten af et polarisationsfilter, et must for enhver instagrammer. (Foto: Creative Pad Media.)

⁸Der gemmer sig rigtig god fysik her, som vi går lidt let forbi. Prøv evt. at Google 'Rayleigh spredning' og 'Rayleigh sky model' næste gang du har 5 min, måske finder du også ud af hvorfor himlen er blå!

De første 4 forsøg giver dig et eksempel på to kvantetilstande, polarisering op = $|0\rangle$ og polarisering ned = $|1\rangle$, der kunne udgøre en qubit. Det sidste af de 5 forsøg, giver formodentlig et "Hmmmmmm ...?" resultat.

Polariseringsfilterene vi har eksperimenteret med laver en måling af polariseringen af fotonerne der rammer filteret. Hvis fotonen kommer gennem filteret så er resultatet af målingen at fotonen har en polarisering der er samme retning som filteret og den foton der kommer ud på den anden side af filteret har denne polariseringsretning.

Appendix G: Beregninger der forklarer eksperimenterne med polarisering

De forsøg vi lige har lavet kan forklares ud fra de regler vi opstillede i ligning 8.1 og de grundlæggende postulater se afsnit D.

Beregning forsøg 1: Lad os sige at lys der kommer fra din computerskærm er polariseret i retningen vi kalder $|0\rangle$ (hvis dette ikke lige passer med den retning du har tænkt på at $|0\rangle$ har så bare drej din computer så det passer!). Sandsynligheden for at lyset kommer igennem polarisationsfilteret afhænger af den vinkel θ som polarisationsfilteret danner med $|0\rangle$ -retningen. Polarisationsfilteret måler om lyset er polariseret i θ -retningen. Den egentilstand der hører til polarisation i θ -retningen er $\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$ så benytter vi Definition 5 og udleder resultatet $P = ((\cos(\theta)\langle 0| + \sin(\theta)\langle 1|)|0\rangle)^2 = \cos(\theta)^2$.

Beregning forsøg 4: Beregningen her er helt lig forsøg 1. Det er blot det første polarimeter der fastsætter polarisationsretningen i stedet for din computerskærm.

Beregning forsøg 5: Efter det første polariseringsfilter er lyset polariseret. Lad os sige at sige at denne retning er $|0\rangle$ (vi kan jo selv vælge hvilken retning filteret peger!) Sandsynligheden, $P_{1\rightarrow 2}$, for at det kommer i gennem det andet polarisationsfilter beregnes helt som i forsøg 1 så vi får igen $P_{1\rightarrow 2} = \cos(\theta)^2$, hvor θ er vinklen mellem polarisationsretningen af det første og det andet filter. Efter lyset er kommet igennem det andet filter (hvis det gør) er det i tilstanden $\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$. Det tredje filter er i $|1\rangle$ -retningen, så for at finde sandsynligheden, $P_{2\rightarrow 3}$ for at lyset fra polarisationsfilter 2 kommer igennem polarisationsfilter 3, skal vi udregne $P_{2\rightarrow 3} = (\langle 1|(\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle))^2 = \sin^2(\theta)$. Endeligt finder vi sandsynligheden for at lyset kommer hele vejen gennem alle 3 polarisationsfiltre ved at tage produktet af de to sandsynligheder vi netop har udregnet $P_{1\rightarrow 3} = P_{1\rightarrow 2} \cdot P_{2\rightarrow 3} = \cos(\theta)^2 \cdot \sin(\theta)^2$.

Opgave 25 | Prøv at plotte funktionen $f(\theta) = \cos(\theta)^2 \cdot \sin(\theta)^2$ som funktion af θ . Check at resultatet giver mening for $\theta = 0^\circ$ og for $\theta = 90^\circ$.

Appendix H: Vektorer

Som vi har diskuteret ovenfor kan tilstanden af en qubit tænkes som en vektor. Men hvordan gøres dette mere formelt? Altså hvis vores qubit er i tilstanden $|\psi\rangle$ hvordan finder vi så den vektor der repræsenterer tilstanden? Det første man skal gøre er at vælge en basis, hvilket svarer til at man vælger hvilken vej x - og y -aksen i et koordinatsystem peger. Lad os vælge basen $|0\rangle$ og $|1\rangle$. Nu er det helt ligetil at bestemme den vektor der repræsenterer vores qubits tilstand $|\psi\rangle$, vi skal blot udregne

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \langle 0|\psi\rangle \\ \langle 1|\psi\rangle \end{pmatrix}$$

Lad os tage et par eksempler og opgaver for at se hvordan det virker

Eksempel Den vektor der repræsenterer qubit tilstanden $|0\rangle$ er

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} \langle 0|0\rangle \\ \langle 1|0\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bemærk at vi brugte regnereglerne (8.1) til at udregne første- og anden-koordinaten af vektoren.

Opgave 26 Vis at den vektor der repræsenterer qubit tilstanden $|1\rangle$ er

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Helt som vi så på i slutningen af afsnit 6 kan vi altså tænke på tilstandene $|0\rangle$ og $|1\rangle$ som enhedsvektorer langs hhv. x - og y -aksen i et koordinatsystem! Lad os også lige tage et eksempel (og et par opgaver) hvor vores qubit tilstand er en superposition.

Eksempel Qubit tilstanden $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ repræsenteres af vektoren

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \begin{pmatrix} \langle 0|\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ \langle 1|\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 1|0\rangle + \langle 1|1\rangle) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 27 En qubit-tilstand, $|\psi\rangle$ kan skrives som $|\psi\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$, hvor θ er en vinkel rundt på enhedscirklen. Vis, at

$$\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Opgave 28 Vi kræver at den generelle qubit-tilstand, $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, er normaliseret, eller med andre ord, at normaliseringsbetingelsen $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ er opfyldt. Vis, at vektoren der repræsenterer vores generelle tilstand er

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Vis, også at normaliseringsbetingelsen svarer til at vektoren har længden 1.

Appendix I: Regnereglerne svarer til prikproduktet

Nu spørger du sikkert dig selv: hvad med de regneregler (8.1) som vi har postuleret for qubit-tilstandene, svarer de så til en regneregul for vektorerne? Det er et rigtigt godt spørgsmål (jeg ville næsten ønske, at det var mig selv der havde stillet det!). Svaret er, ja! Vores regneregler for qubit tilstandene svarer til at tage prikproduktet mellem vektorerne. Lad os tage to eksempler

Eksempel | Qubit tilstandene $|0\rangle$ og $|1\rangle$ er repræsenteret ved

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Regnereglen $\langle 0|0\rangle = 1$ svarer til at tage prikproduktet af vektoren der repræsenterer tilstanden $|0\rangle$ med sig selv

$$\langle 0|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Husk at prikproduktet af en vektor med sig selv er kvadratet på vektorens længde, så regnereglen $\langle 0|0\rangle = 1$ svarer altså til at kræve at vektoren der repræsenterer $|0\rangle$ har længde 1. Det samme gælder helt analogt for $|1\rangle$.

Eksempel | Regnereglen $\langle 0|1\rangle = 0$ svarer til at de vektorer der repræsenterer $|0\rangle$ og $|1\rangle$ er ortogonale

$$\langle 0|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.1})$$

Bemærk | Ekspert-bemærkning: Qubit tilstandene $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ og $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ er repræsenteret af

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Begge vektorer har længde 1 og er indbyrdes ortogonale (eller sagt i mere daglig tale, de to vektorer står vinkelret på hinanden).

Dette er helt ligesom $|0\rangle$ og $|1\rangle$. Vi kunne derfor have valgt tilstandene $|+\rangle$ og $|-\rangle$ som vores basis. Dette svarer for vektorerne til at vælge x - og y -akserne på vores koordinatsystem så de ligger langs vektorerne der repræsenterer $|+\rangle$ og $|-\rangle$.

Opgave 29 | Udregn prikproduktet mellem vektorerne der repræsenterer tilstandene $|+\rangle$ og $|-\rangle$ og vis, at de er ortogonale.

Appendix J: Matricer

Vi har netop set at qubit-tilstande kan repræsenteres som vektorer. Desuden ved vi fra afsnit B samt 13 at operatorer der virker på tilstande er helt centrale. Det er derfor naturligt at spørge om der er en matematisk størrelse der virker ind på vektorer ligesom vores operatorer virker ind på tilstandene? Det er igen et rigtigt godt spørgsmål! (Denne gang indrømmer jeg at det var mig der spurgte ...) Svaret er igen, ja! Matricer virker ind på vektorer ligesom operatorer virker ind på tilstande.

Matri-hvar-for-noget ...? Ja, dem har du nok ikke mødt før, men de er heldigvis helt ligetil at have med at gøre! Særligt når vi som her holder os til 2×2 matricer.

Definition 17 En 2×2 matrice skrives

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

hvor a , b , c og d er tal.

OK, det ser jo fint ud men hvordan virker den på en vektor?

Definition 18 En 2×2 matrice virker på en vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

som følger

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Bemærk Bemærk at når en 2×2 matrice virker på en 2D vektor så får vi en 2D vektor tilbage. Det er helt ligesom når vi virkede med vores enkelt qubit operatorer på vores enkelt qubit-tilstande!

Eksempel Som et eksempel på hvordan dette virker udregner vi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det minder jo farligt meget om at lade operatoren X virke på tilstanden $|0\rangle$ og som vi skal se i næste afsnit er det præcis det vi har udregnet! Men først lige en opgave så du kan få prøvet at lade en matrice virke på en tilstand.

Opgave 30 Udregn

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En anden yderst nyttig operation er at rotere en vektor.

Definition 19 Rotationsmatricen: Den matrice der roterer en vektor vinklen θ er givet ved

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Opgave 31 Prøv at lave en rotation af en vektor: Vis, at

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Lav en tegning der illustrerer de to vektorer fra din udregning og angiv på tegningen vinklen θ .

Appendix K: Operatorer som matricer

OK, nu har vi operatorer og vi har matricer. Men hvordan kommer vi fra en operator til den matrice der repræsenterer den? Ligesom for vektorerne er det første skridt at vælge en basis: Vi vælger igen basen $|0\rangle$ og $|1\rangle$.

Definition 20 2×2 matricen der repræsenterer en enkelt qubit operator M bestemmes ved at udregne

$$\begin{pmatrix} \langle 0|M|0\rangle & \langle 0|M|1\rangle \\ \langle 1|M|0\rangle & \langle 1|M|1\rangle \end{pmatrix}$$

Eksempel Lad os prøve at udregne matricen der svarer til vores måleoperator $M = |1\rangle\langle 1|$: Vi starter med at indsætte $M = |1\rangle\langle 1|$ i definitionen ovenfor

$$M = \begin{pmatrix} \langle 0|1\rangle\langle 1|0\rangle & \langle 0|1\rangle\langle 1|1\rangle \\ \langle 1|1\rangle\langle 1|0\rangle & \langle 1|1\rangle\langle 1|1\rangle \end{pmatrix}$$

og så bruger vi regnereglerne (8.1) til at udregne elementerne i matricen

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 32 Vis at matricerne der repræsenterer operatorerne Z og X er givet ved (se Definition 10 og Definition 11)

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matricen der repræsenterer Hadamard operatoren er

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bemærk at man ganger et tal ind i en matrix ved at gange alle elementer i matricen med tallet. Det svarer helt til hvordan vi ganger et tal med en vektor.

Appendix L: Gange matricer sammen

Når vi instruerer kvantecomputere sætter vi ofte flere operatorer efter hinanden, dette svarer til at gange matricerne der repræsenterer operatorerne sammen.

Definition 21 To 2×2 matricer ganges sammen således:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \quad (\text{L.1})$$

Eksempel Lad os lige prøve at gange to matricer sammen, så vi kan se hvordan det virker

$$ZX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{L.2})$$

Bemærk Bemærk at rækkefølgen af matricerne er vigtig. Man kan ikke uden videre bytte om på de to matricer man gange sammen, lige som man kan når man ganger to tal sammen. (På matematiksprog ville vi sige at den kommutative lov ikke gælder for multiplikation af matricer.)

Opgave 33 Prøv at udregne matricerne der svarer til hhv. operationerne ZX og XZ og se om du får samme resultat. Ah ... udregningen af, ZX , har vi allerede klaret i eksemplet ovenfor - det var heldigt! Så mangler du bare at udregne

$$XZ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{L.3})$$

Bemærk, at du ikke får samme resultat som for ZX .

Opgave 34 Prøv at udregne $ZX|0\rangle$ og $XZ|0\rangle$ v.h.a. matricer og vektorer. Check at du får samme resultat som i Opgave 19.

Opgave 35 Vis, at hvis matricen der først roterer vinklen θ og dernæst vinklen $-\theta$ er det samme som identitets matricen, dvs. vis at

$$R(-\theta)R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{L.4})$$

Vink: Benyt at $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ og $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$.

Appendix M: Egenverdier og egensøjler

Begreberne egentilstand og egenverdi af en operator er afgørende når vi måler operatoren, jvf. afsnit B. (Husk, når vi måler en operator er de mulige resultater af målingen, egenverdierne af operatoren og efter målingen er systemets tilstand den tilhørende egentilstand.) Nu spørger du sikkert dig selv: Når nu vi kan repræsentere operatorer som matricer og tilstande som vektorer, mon så ikke der er noget der hedder egenverdier og egenvektorer for en matrix? Svaret er igen, ja!

Inden vi tager definitionen så bemærk, at når en operator virker på en tilstand så får vi typisk en anden tilstand. På helt samme måde, når vi virker med en matrice på en vektor så får vi typisk en anden vektor, der peger i en anden retning end den vi startede med. Det der er særligt ved egentilstande for en operator (egenvektorer for en matrix) er, at når man virker på den med operatoren (matricen), så får man den samme tilstand (vektor) tilbage ganget med et tal.

Definition 22 Egentilstand og egenverdi: Hvis en matrice M virker på en vektor $\vec{m}$ og vi får et tal, m , gange vektoren $\vec{m}$ tilbage, dvs. hvis $M\vec{m} = m\vec{m}$, så er $\vec{m}$ en egenvektor for matricen M med egenverdien m .

OK, det er godt nok en god omgang m' er, så lad os prøve at gøre det lidt mere konkret med et eksempel og et par opgaver.

Eksempel | Vektoren $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ med egenværdi 1 da

$$M|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{M.1})$$

Opgave 36 | Vis, at vektoren der repræsenterer $|0\rangle$ er en egenøjle for matricen M der repræsenterer måleoperatoren med egenværdi 0.

Opgave 37 | Vis, at vektoren der repræsenterer $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ er en egenvektor for matricen der repræsenterer operatoren X med egenværdi 1. dvs. vis at

$$X \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{M.2})$$

For at finde egenværdier af en matrix er det nyttigt at kende til begrebet determinant

Definition 23 | Determinant: determinanten af en 2×2 matrice er givet ved

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb \quad (\text{M.3})$$

og den karakteristiske ligning

Definition 24 | Den karakteristiske ligning for en 2×2 matrice er

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{M.4})$$

De værdier af λ der løser ligningen er egenværdierne af matricen.

Man kan altså bestemme egenværdierne, λ , af en 2×2 matrice ved at løse den karakteristiske ligning.

Eksempel | For at se hvordan det virker så lad os bestemme egenværdierne af måleoperatoren M . Vi skal altså løse den karakteristiske ligning

$$\det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{M.5})$$

Vi udregner determinanten v.h.a. definitionen og får ligningen

$$(0 - \lambda)(1 - \lambda) = 0 \quad (\text{M.6})$$

Løsningerne kan ses at være $\lambda = 0$ og $\lambda = 1$ så egenværdierne af måleoperatoren er 0 og 1. Dette er helt som forventet der er jo netop 0 og 1 vi kan få som resultat når vi måler M .

Opgave 38 | Vis at matricerne Z , X og H alle har egenværdier 1 og -1.

Mere om vektorer og matricer: Dette er selvfølgelig kun en kort indføring i matricer vektorer og deres brug i kvantefysik. Vi har f.eks. holdt os til en enkelt qubit. Hvis du er nysgerrig efter at se hvordan man gør alt dette når der er mere en et qubit så se f.eks. [dette link](#) eller [dette link](#).

Appendix N: To mirakler?

Formålet med denne note er at få dig så hurtigt igang med at kunne opbygge din kvanteintuition, ved så hurtigt som muligt at gøre det muligt for dig regne og lave forsøg med qubits. Men undervejs skete der et par 'mirakler', vi tager et kig på dem begge her. (For at det ikke skal blive for uoverskueligt holder vi os til at betragte 'miraklerne' for et enkelt qubit.)

SECTION N.1

Mirakel nr. 1: tilstanden er stadig normaliseret efter vi har virket på den med en operator

Når vi instruerer kvantecomputeren i at lave forsøg starter vores qubit altid i tilstanden $|0\rangle$, derefter virker vi på den med vores operatorer Z , X og H . Tilstanden $|0\rangle$ er selvfølgelig normaliseret men det er $Z|0\rangle$, $X|0\rangle$ og $H|0\rangle$, også. Det skulle de gerne være ellers ville den totale sandsynlighed for at måle enten 0 eller 1 jo ikke være 1! Selv hvis vi virker med flere operatorer i træk, f.eks. $HX|0\rangle$, så er tilstanden stadig normaliseret. Det er noget af et mirakel! Miraklet skyldes at de operatorer vi betragter er ortogonale. For at få en fornemmelse af hvad dette er, så tager vi et kig på de 2×2 matricer der svarer til vores enkelt qubit operatorer.

Det første begreb vi skal have på banen er den transponerede af en matrice

Definition 25 Transponeret: Den transponerede M^T af en 2×2 matrice, M , er

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad M^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Og nu kan vi få definitionen af en ortogonal matrice på banen

Definition 26 Ortogonal matrice: En 2×2 matrice, O , er en ortogonal matrice hvis $O^T O = 1$.

Eksempel Lad os se om matricen der repræsenterer operatoren X er en orthogonalt matrice. Husk at

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

så vi kan bestemme den transponerede

$$X^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

OK, i dette tilfælde er X^T altså lig X . For at se om X er en ortogonal matrice udregner vi

$$X^T X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Så, ja, X er en ortogonal 2×2 matrice.

Opgave 39 Check at 2×2 matricerne der repræsenterer operatorerne Z og H er ortogonale matricer.

Fint, nok, men hvad har det her ortogonalitet med det mirakel at gøre? Svaret er simpelt: Ortogonale matricer bevarer normaliseringen af den vektor de virker på. For at

se dette så bemærker vi at en ortogonal 2×2 matrice kan skrives enten som

$$O = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad O = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Den første mulighed er præcis rotationsmatricen og rotationer ændrer ikke på længden af en vektor. Den anden mulighed er den matrice der giver en reflektion omkring vektoren

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

og når vi laver en reflektion af en vektor ændrer den heller ikke sin længde.

Så 'miraklet' med at længden af vores vektor ikke ændres skyldes altså, at de operatorer vi lader virke på vores qubit er ortogonale.

Opgave 40 Den anden mulighed vi har for O virke på en generel normaliseret vektor, dvs. udregn

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

og check at den vektor du får ud stadig er normaliseret.

SECTION N.2

Mirakel nr. 2: Hvordan kan det være at der er to reelle egenverdier?

Når vi måler en operator bliver svaret af målingen en af egenverdierne af operatoren. Men hvordan kan det være at der faktisk er 2 reelle egenverdier vi kan måle? Det er vel ikke alle 2×2 matricer der har to reelle egenverdier.

Når vi som her i noten arbejder med de reelle tal (og ikke de komplekse), har vores operatorer automatisk reelle koefficienter og de matricer der repræsenterer operatorerne automatisk reelle elementer. Når i matricen er reelle tal, og vi gerne vil sikre at egenverdierne er reelle skal vi have fat i de symmetriske matricer

Definition 27 En 2×2 symmetrisk matrice har formen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

hvor a , b og d er reelle tal.

Bemærk at matricen er symmetrisk omkring diagonalen.

Opgave 41 Vis at matricerne Z , X og H alle er symmetriske.

Opgave 42 I denne opgave viser du at symmetriske 2×2 matricer har to reelle egenverdier.

a) Opskriv den karakteristiske ligning for den symmetriske matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

b) Den ligning du har opskrevet er en andengradsligning i λ . Bestem diskriminanten.

c) Vis at den symmetriske matrice har to reelle egenverdier.